Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Matematika tantárgyverseny
Megyei szakasz, 2012. március 10.

X. OSZTÁLY

1. feladat. Az $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti a

$$|f(x) - f(y)| \leq |\sin x - \sin y|,$$

egyenlőtlenséget bármely $x, y \in [0, \infty)$ esetén. Bizonyítsd be, hogy f korlátos és periodikus, a $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + f(x)$ függvény pedig monoton!

2. feladat. a) Határozd meg a $2^x = x + 1$ egyenlet összes valós megoldását!

b) Az $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényre teljesül az

$$f(f(x)) = 2^x - 1$$

egyenlőség bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén. Igazold, hogy $f(0) + f(1) = 1$.

Gazeta Matematică

3. feladat. Az $(a_n)_{n\geq 1}$ természetes számokból álló sorozatban $a_n \leq n$, bármely $n \geq 1$ esetén és

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cos \frac{\pi a_k}{n} = 0,$$

bármely $n \geq 2$ esetén.

a) Határozd meg az a_2 értékét!

b) Határozd meg az $(a_n)_n$ sorozat általános tagját $n \in \mathbb{N}^*$ függvényében!

4. feladat. Az a és b olyan racionális számok, amelyekre a $z = a + ib$ komplex szám modulusza 1.

Igazold, hogy a $z_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$ komplex szám modulusza racionális bármely n páratlan természetes szám esetén!

Munkaidő 4 óra.
Minden feladatra 7 pont szerezhető.